المسألة الثالثة :

1) المجال المغلق $[a, b]$ من الفضاء الحقيقي R هو مجموعة غير مفتوحة لأن النقطة b غير داخلية

$]a, b]$ غير مفتوحة لأن النقطة a غير داخلية

لإثبات ذلك نأخذ نقطة كيفية c من هذا المجال ونحسب بعدها عن a وعن b

$$d(a,c) = c - a$$

$$d(b,c) = b - c$$

$$r = \min(c-a, b-c)$$

$$B(c, r) \subseteq]a,b[$$ الكرة المفتوحة

هنا بينا أن النقطة c داخلية وباعتبار c كيفية جميع نقاط المجال داخلية

مبرهنة :

أي كرة مفتوحة في فضاء متري هي مجموعة مفتوحة.

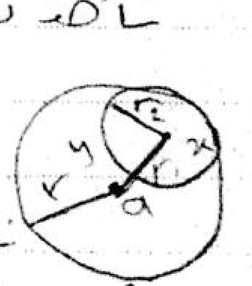
البرهان :

نأخذ كرة مفتوحة مركزها a ونصف قطرها r.

نأخذ نقطة كيفية x من هذه الكرة $B(a,r)$

$$d(a,x) = r_1 < r$$

$$r_2 = r - r_1$$



نأخذ كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها r_2 $y \in B(x,r_2)$

ونثبت أن هذه الكرة الجديدة محتواة بالكامل في الكرة الكبيرة.

نأخذ نقطة كيفية y من الكرة الجديدة

$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < r_1 + r_2 = r$ بعد النقطة y عن a.

$$\Rightarrow y \in B(a,r)$$

وباعتبار y نقطة كيفية هنا بينا أن جميع نقاط الكرة الجديدة $B(x,r_2)$

محتواة في الكرة الأصلية $\Leftarrow$ x نقطة داخلية

وباعتبار x نقطة كيفية $\Leftarrow$ جميع نقاط الكرة داخلية والمجموعة

تكون مفتوحة.

Subject Date

مبرهنة :
تكون المجموعة الجزئية من فضاء متري مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كانت
تساوي اجتماعاً لكرات مفتوحة..
البرهان :

لزوم الشرط ⇐
لنأخذ مجموعة مفتوحة A في الفضاء المتري .
نأخذ نقطة كيفية x من هذه المجموعة ⇐ A نقطة داخلية .
هذا يعني توجد كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها عدد موجب r_x بحيث
تكون محتواة بالكامل في A

$$B(x, r_x) \subseteq A$$

أي مجموعة تساوي اجتماع عناصرها

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A$$

كفاية الشرط
⇐ لنفرض أن A تساوي اجتماع لكرات مفتوحة
لو أخذنا أي نقطة x منها ستكون واقعة في إحدى الكرات المفتوحة
المكونة لـ A ⇐ x نقطة داخلية

نتيجة :
أي اجتماع لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة .
وهذه هي أول خاصة أساسية للكرات المفتوحة

خاصة (2) : تقاطع أي عدد منته من المجموعات المفتوحة هي مجموعة مفتوحة
البرهان :
لنأخذ عدد منته من المجموعات المفتوحة $A_1, A_2, \ldots, A_n$
يجب أن نثبت أن تقاطعهم هو مجموعة مفتوحة $x \in A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
نأخذ نقطة كيفية x تنتمي إلى جميع المجموعات أي :

$x \in A_1 ; \exists B(x, r_1) \subseteq A_1$ نقطة داخلية في A

$x \in A_2 ; \exists B(x, r_2) \subseteq A_2$

$\vdots$

$x \in A_n ; B(x, r_n) \subseteq A_n$

نفرض $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n)$
عندها تكون الكرة المفتوحة موجودة في الكل إذاً هي موجودة
في تقاطع $B(x,r) \subseteq A_i \; ; \; i=1,2,\dots,n$
$B(x,r) \subseteq A$

خاصة [3]:
المجموعة الكلية X والمجموعة الخالية ϕ هما مجموعتان مفتوحتان في أي
فضاء متري
- أي كرة مفتوحة $B(x,r)$ في هذا الفضاء ستكون محتواة فيه (في الفضاء)
الاجتماع مجموعة خالية يعطي مجموعة $X = \bigcup_{i \in \phi} A_i$
خالية
التقاطع في مجموعة خالية يعطي مجموعة $\phi = \bigcap_{i \in \phi} A_i$
خالية

كما يمكن ان نقول بالنسبة ل ϕ :
- تكون المجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية وبما أن ϕ لا تحوي
أي نقط وبالتالي الأمر محقق.
تعريف الفضاء التبولوجي:
لتكن X مجموعة ما و T أسرة من المجموعات الجزئية في X تسمى الأسرة
T تبولوجيا على X إذا حققت الشروط التالية:
[1] أي اجتماع لعناصر من T هو عنصر من T
[2] تقاطع عدد منته من عناصر T هو عنصر من T
[3] X, ϕ عنصران من T
- إن المجموعة X مع التبولوجيا T تسمى فضاء تبولوجي.
- إن عناصر التبولوجيا (T) تسمى مجموعات مفتوحة.
أي ~~xxxx~~ فضاء متري هو فضاء تبولوجي حيث التبولوجيا مولدة
بواسطة المسافة.
انتهت المحاضرة الثالثة.